

IUGONET研究会2019
September 13, 2019
京都大学宇治キャンパス

短時間データに含まれる複数信号の 周波数推定手法ESPRIT (Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques)の紹介

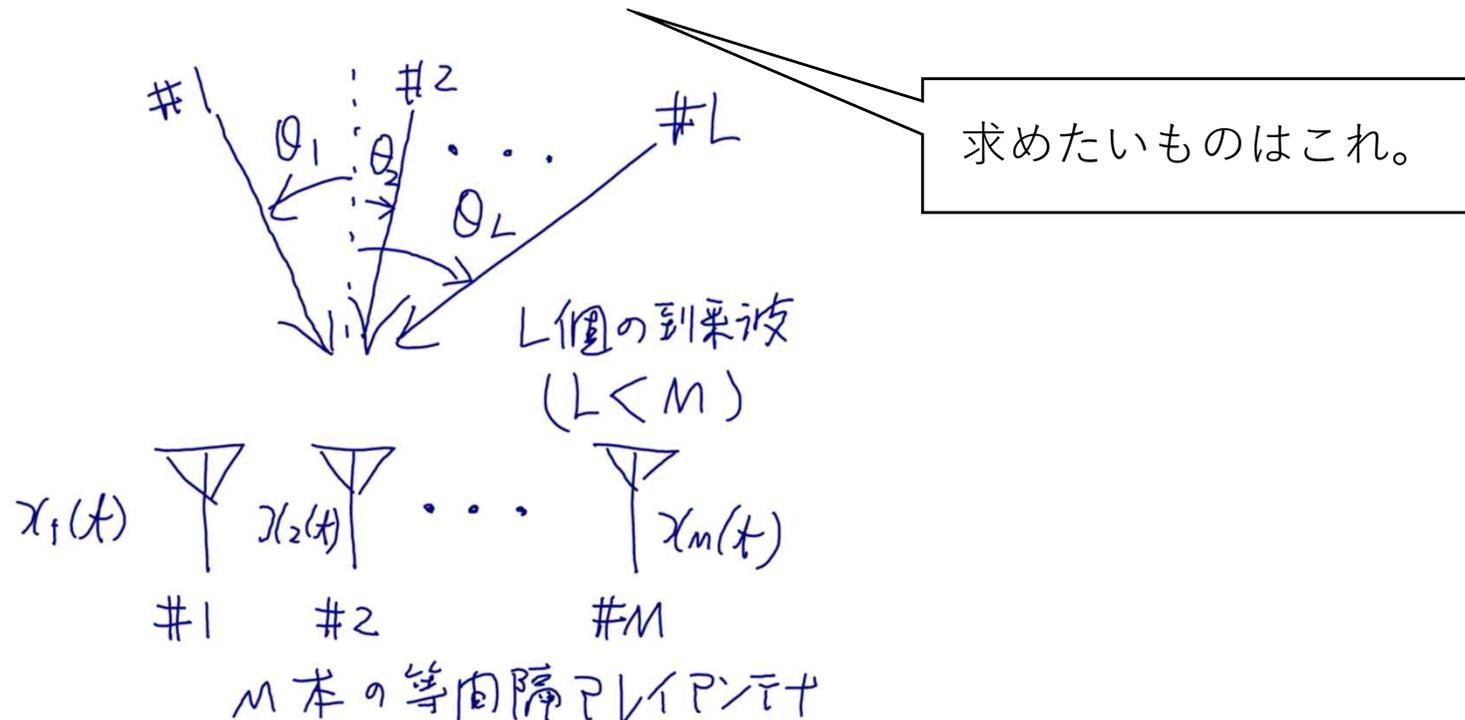
山本衛 (京都大学生存圏研究所)

ESPRIT法とは

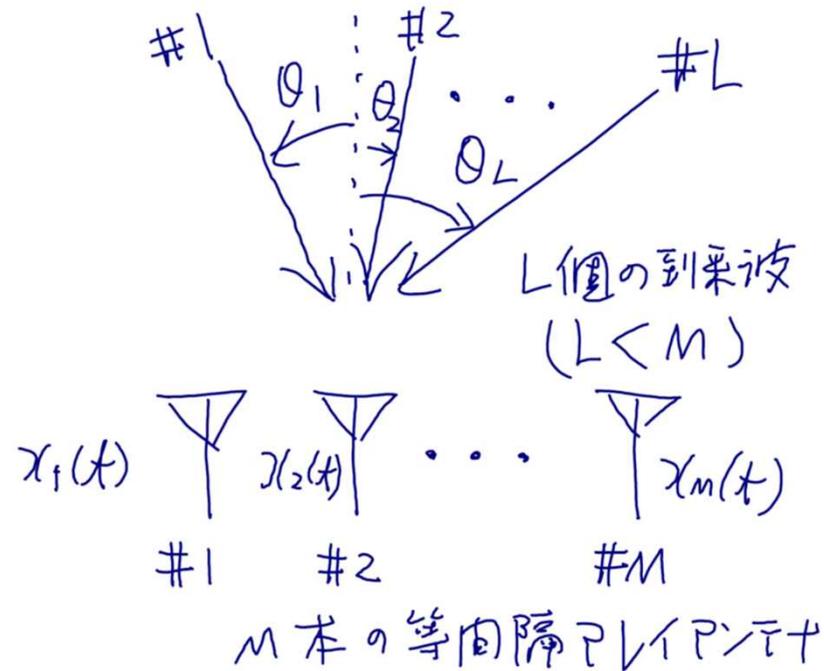
- ある信号を等間隔に配置された複数の素子で観測するとき、素子間の位相差を推定する手法。
- アレイアンテナの電波到来方向の推定手法として開発されたらしい。しかしながら、
 - 電波到来方向の推定 = 複数アンテナ間の信号位相差
 - 周波数推定 = 時間サンプル間の信号位相差 (の微分)
 - 距離推定 = 複数周波数で得られたレーダーエコーの位相差から求める (例えばFM-CWレーダー)
- 全てに適用できる。特長は、
 - 少数サンプル (短時間のデータ) から推定できる。
 - 複数の信号を分離して推定できる。
 - フーリエ変換に基づく方法のように、周波数が信号長の整数分割に縛られないことがない。
- 問題点は、
 - 等間隔サンプリングが必要
 - (有効な) 信号の数を決めてから解析する。
 - 信号強度は求まらない (求めにくい?)

ESPRIT法（問題設定）

- アレイアンテナの電波到来方向の推定として説明
 - M本のアンテナが一行に並んでいる。（1次元アレイ）
 - 各アンテナで得られるデータ： $x_{1,2,\dots,M}(t)$
 - 雑音： $n_{1,2,\dots,M}(t)$
 - **L個の方向（角度 $\theta_{1,2,\dots,L}$ ）**から電波が到来する。



ESPRIT法 (問題設定)



• 信号 $X(t)$ をベクトル表記すると

- $X(t) = [x_1, x_2, \dots, x_M]^T = AF(t) + N(t)$

ここで、 $F(t) = [F_1(t), F_2(t), \dots, F_L(t)]^T$ は、L個の方向から来る電波の信号。さらに、

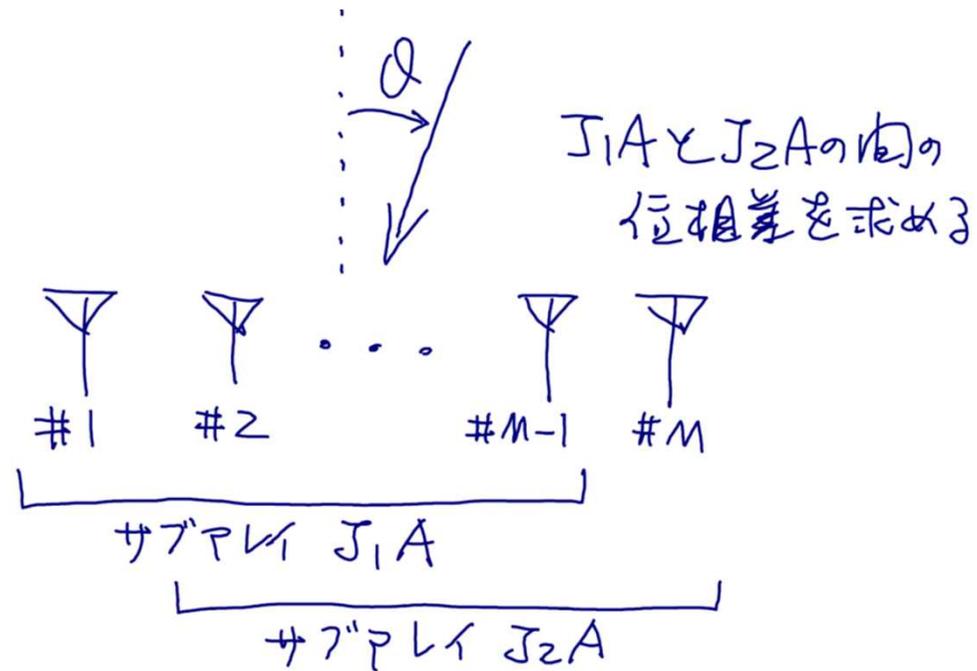
- $A = [a(\theta_1), a(\theta_2), \dots, a(\theta_L)]$ (方向行列)

求めたいもの

- $a(\theta_l) = [e^{j\Psi_1(\theta_l)}, e^{j\Psi_2(\theta_l)}, \dots, e^{j\Psi_M(\theta_l)}]^T$ (方向ベクトル)

- $N(t) = [n_1(t), n_2(t), \dots, n_M(t)]^T$ (雑音ベクトル)

ESPRIT法 (考え方)



- アンテナ列を2分割し、その間の位相差を求める。
 - サブアレイ 1 : アンテナ1番 ~ M-1番。 J_1A
 - サブアレイ 2 : アンテナ2番 ~ M番。 J_2A
 - 関係性は、 $J_1A\Psi = J_2A$ ここで、
 - $J_1 = [I_{M-1} | 0_{M-1,1}]$
 - $J_2 = [0_{M-1,1} | I_{M-1}]$
 - $\Psi = \text{diag} [e^{i\phi_1}, e^{i\phi_2}, \dots, e^{i\phi_L}]$

ESPRIT法 (考え方)

$$\begin{array}{c} M \\ \hline \boxed{J_1} \\ \hline M-1 \end{array} \begin{array}{c} L \\ \hline \boxed{A} \\ \hline M \end{array} \begin{array}{c} L \\ \hline \boxed{\Psi} \\ \hline L \end{array} = \begin{array}{c} M \\ \hline \boxed{J_2} \\ \hline M-1 \end{array} \begin{array}{c} L \\ \hline \boxed{A} \\ \hline M \end{array}$$

• アンテナ列を2分割し、その間の位相差を求める。

• サブアレイ 1 : アンテナ1番～M-1番。 $J_1 A$

• サブアレイ 2 : アンテナ2番～M番。 $J_2 A$

• 関係性は、 $J_1 A \Psi = J_2 A$ ここで、

• $J_1 = [I_{M-1} | 0_{M-1,1}]$

• $J_2 = [0_{M-1,1} | I_{M-1}]$

• $\Psi = \text{diag} [e^{i\phi_1}, e^{i\phi_2}, \dots, e^{i\phi_L}]$

この式を Ψ について解きたい。
しかし、 A (方向行列) も
また未知なので、このまま
では解けない。

信号の相関行列と固有値分解

- アンテナ (M本) から得られる信号の相関行列は、
 $R_{xx} \triangleq E[X(t)X^H(t)]$ 、ここで $E[\]$ は期待値を求める操作。実際には時間平均または空間平均を行う。 X^H は共役転置 (以後同じ)。
- 相関行列 R_{xx} の固有値を求め、固有値を大きい方から並べて固有値分解する。 (注: R_{xx} はエルミート行列)

$$R_{xx} = E\Lambda E^H$$

$$\begin{array}{c} M \\ \square \\ M \end{array} R_{xx} = \begin{array}{c} M \\ \square \\ M \end{array} E \begin{array}{c} M \\ \square \\ M \end{array} \Lambda \begin{array}{c} M \\ \square \\ M \end{array} E^H$$

- 固有ベクトルを並べた行列と固有値は、信号部分空間と雑音部分空間に区別できる (次ページ)

固有値・固有ベクトル

正方行列 A に対して

$$Ax = \lambda x$$

と存在ベクトル x と スカラー λ が求まる
固有ベクトル 固有値

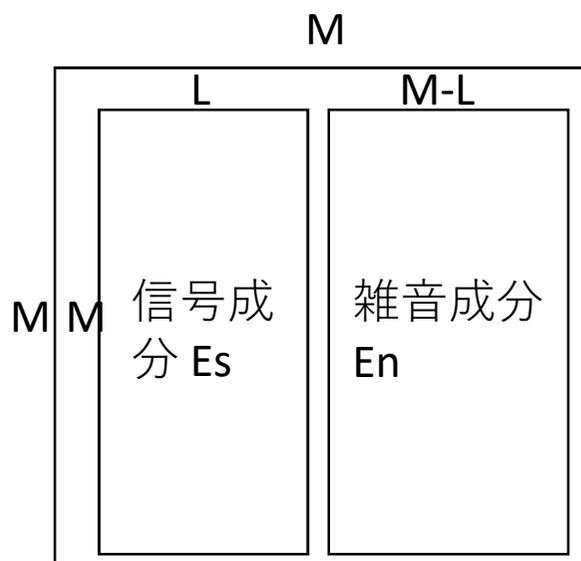
行列 $A \Leftrightarrow$ 線形変換

たとえば、地球の回転 A とすると、
 地軸に沿うベクトル x に対してのみ

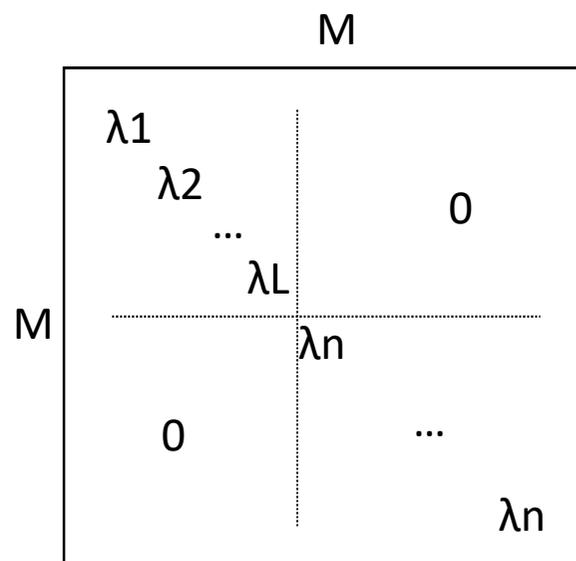
$$Ax = \lambda x$$

が成立する。地軸ベクトル \Leftrightarrow 固有ベクトル

信号部分空間と雑音部分空間



固有ベクトル行列 E_s の構造



固有値の対角行列 Λ の構造

$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_L > \lambda_n > \dots$ 最後まで

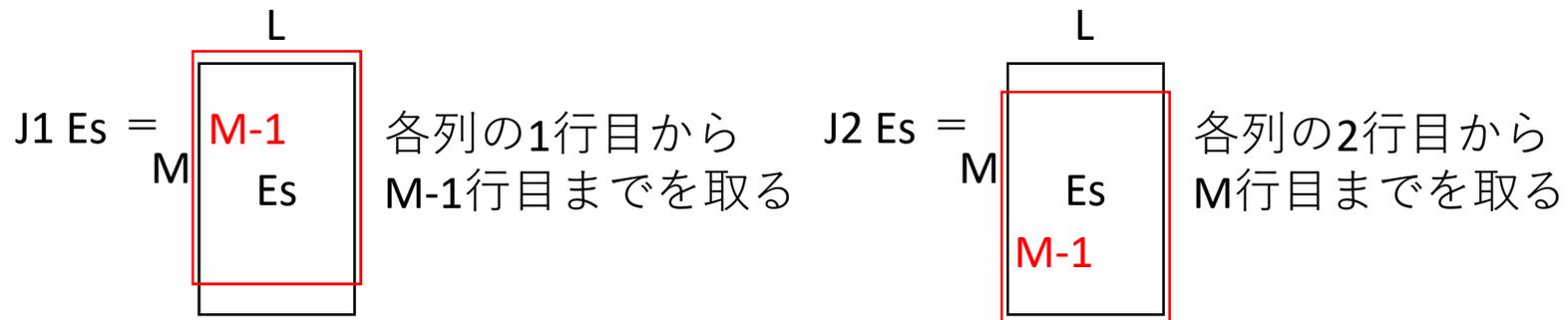
信号部分

雑音部分

ESPRIT法（解くべき方程式）

- （天下りですが）信号部分空間の固有値ベクトル行列 E_s と、方向行列 A の関係 $E_s = AT$ を満たす正則行列 T がある。
- これを用いると解くべき方程式は以下の通り。

$$J_1 E_s \Phi = J_2 E_s$$
$$\Phi = T^{-1} \Psi T$$



- 上の方程式を最小二乗法（TLS (Total-Least-Square)法）で解いて ϕ を求め、さらにその固有値として、素子間の位相情報である Ψ が求められる（少しややこしい行列演算を行うため、ここでは省略）。

解析例

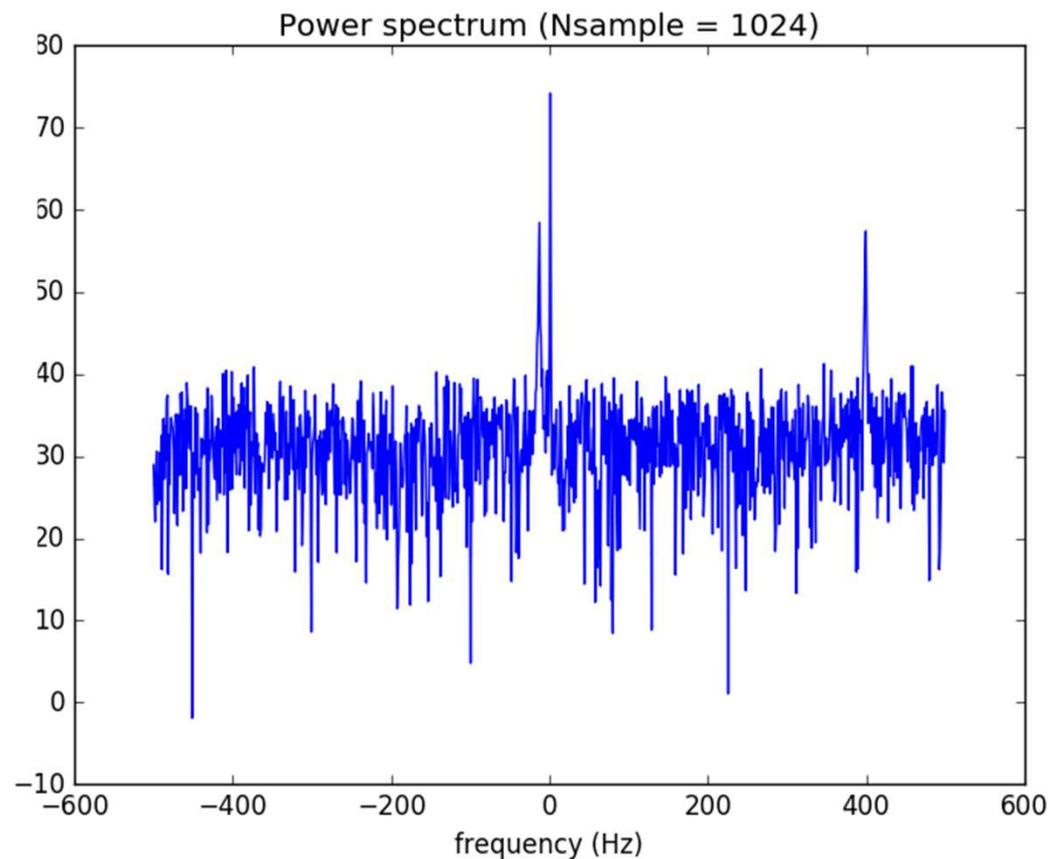
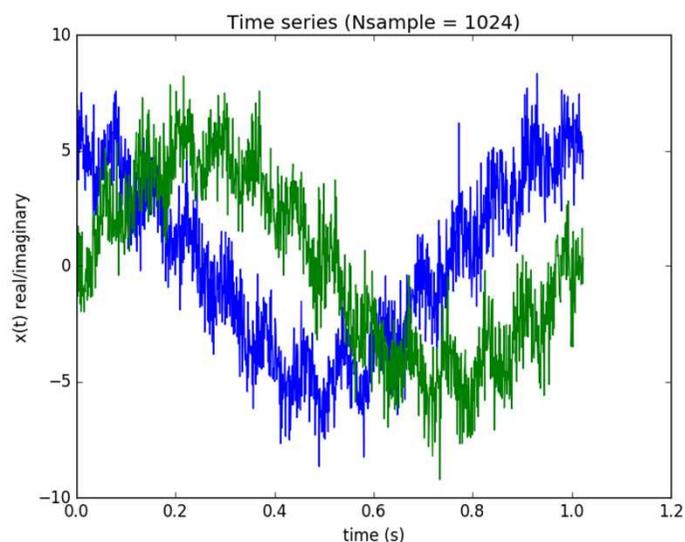
- 条件

- 複素信号、サンプリング間隔 = 1ms
- 雑音：ガウシアン乱数 (rms = 1)
- 3つの正弦波信号を重畳する。
 - 周波数 1Hz、振幅 = 5
 - 周波数 -13Hz、振幅 = 1
 - 周波数 399Hz、振幅 = 1

- 調べ方

- 3つの正弦波が到来していると仮定する (L=3)
- 最大ラグ数 = 30点 (固定)
- データ長を1024点 (約1秒)、128点 (約1.3秒)、64点 (0.64秒) と変化させて、時系列データ、FFTパワースペクトル、ESPRIT法の結果を示す。

信号点数1024 (約1秒間)



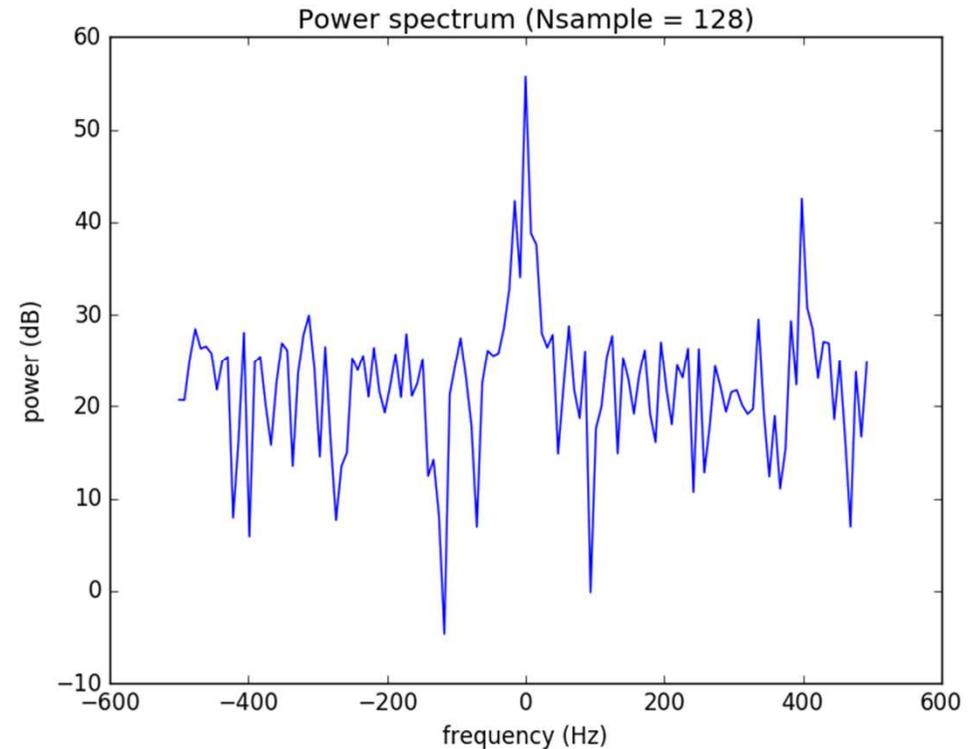
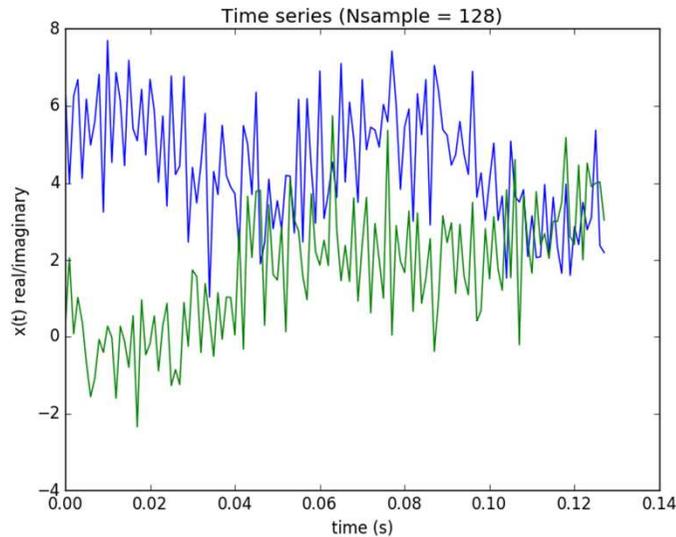
Esprit法の結果 = 20回試行の平均値 (標準偏差)

1.002 Hz (0.017 Hz)

-13.15 Hz (0.374 Hz)

399.01 Hz (0.117 Hz)

信号点数128 (約1.3秒間)



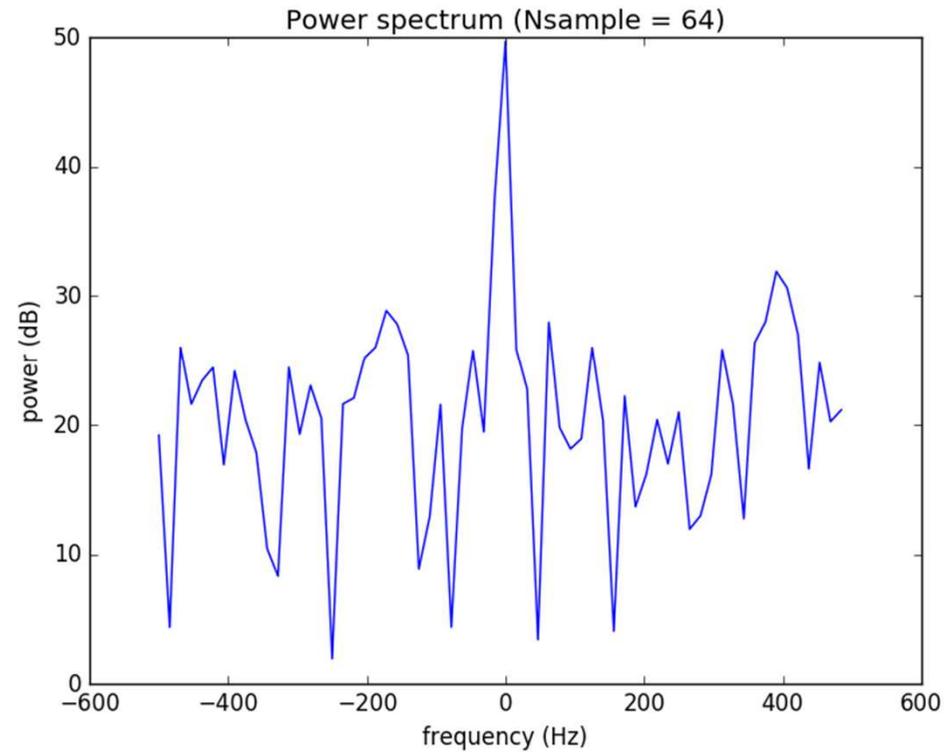
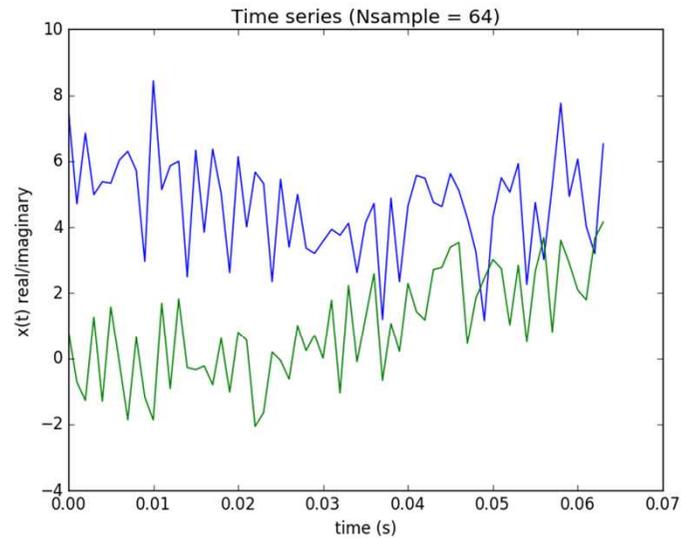
Esprit法の結果 = 20回試行の平均値 (標準偏差)

1.214 Hz (0.123 Hz)

-17.75 Hz (2.667 Hz)

399.11 Hz (0.349 Hz)

信号点数64 (約0.64秒間)



Esprit法の結果 = 20回試行の平均値 (標準偏差)

1.991 Hz (0.330 Hz)

-20.29 Hz (6.214 Hz)

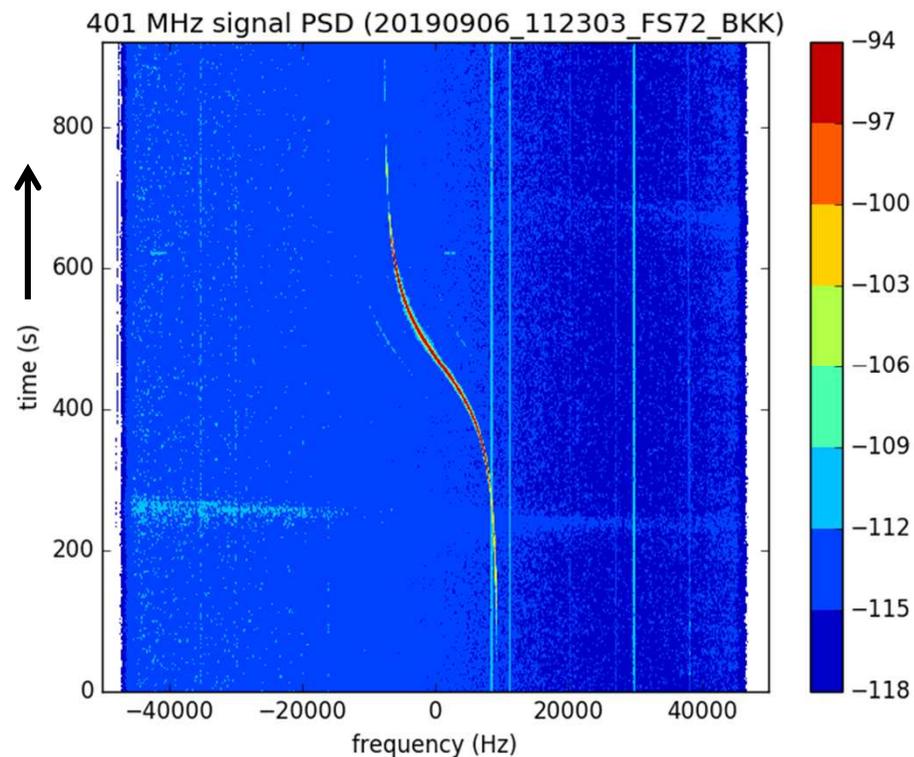
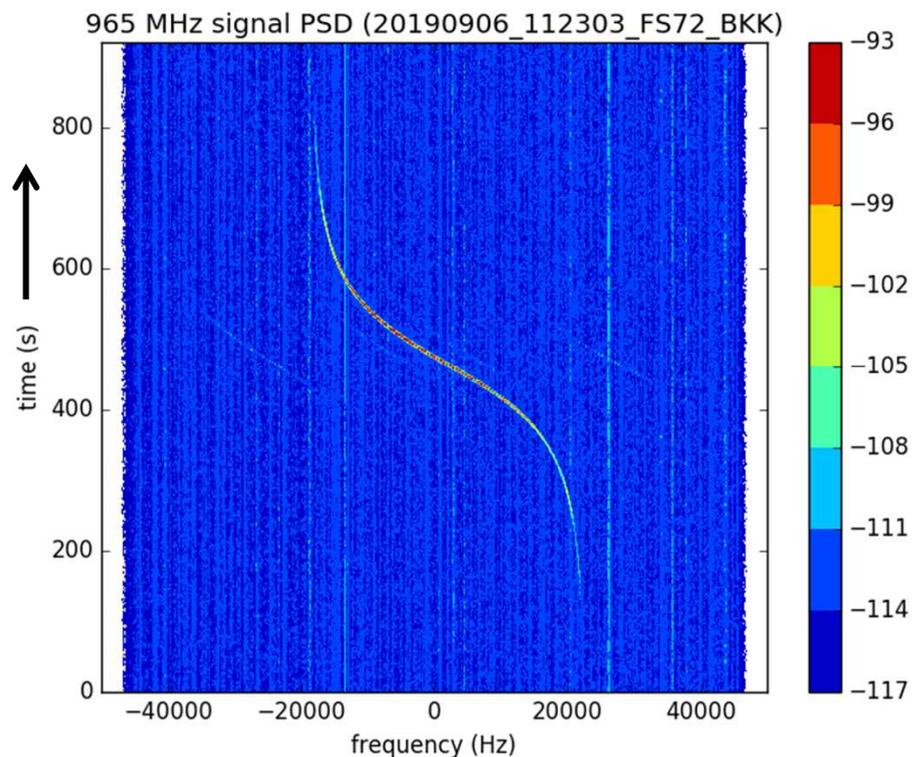
399.16 Hz (0.822 Hz)

1st COSMIC-2 Beacon Signal (1)

September 6, 2019 11:23UT-, Bangkok, Thailand

965.6 MHz

400.9 MHz

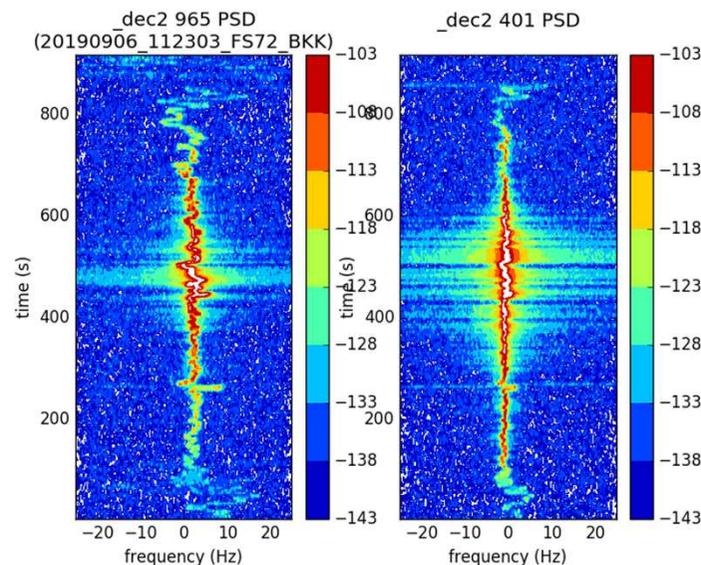
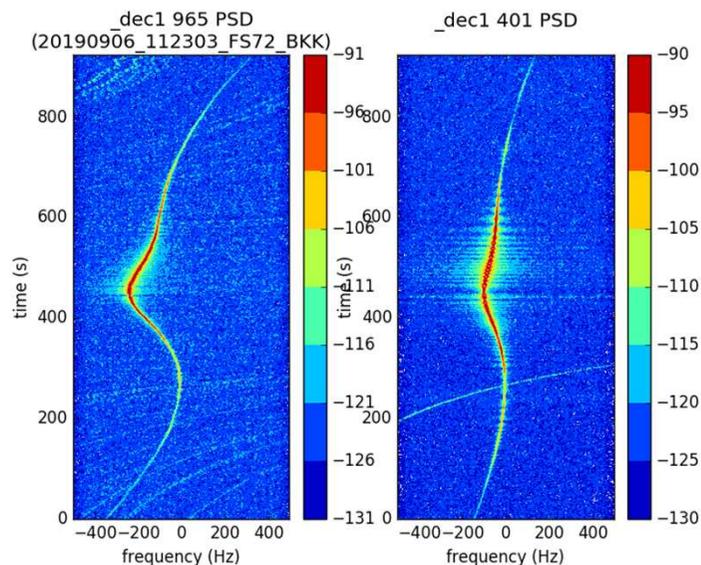


Monitoring 400.9 MHz and 965.6 MHz signal from FORMOSAT-7/COSMIC-2

- Started on September 1, 2019
- Bangkok (Thailand), BKK, 13.7278 deg N, 100.7724 deg E
- Ho Chi Minh (Vietnam), HCM, 10.8486 deg N, 106.5598 deg E
- Kototabang (EAR site, Indonesia), EAR, 0.2044 deg S, 100.3203 deg E

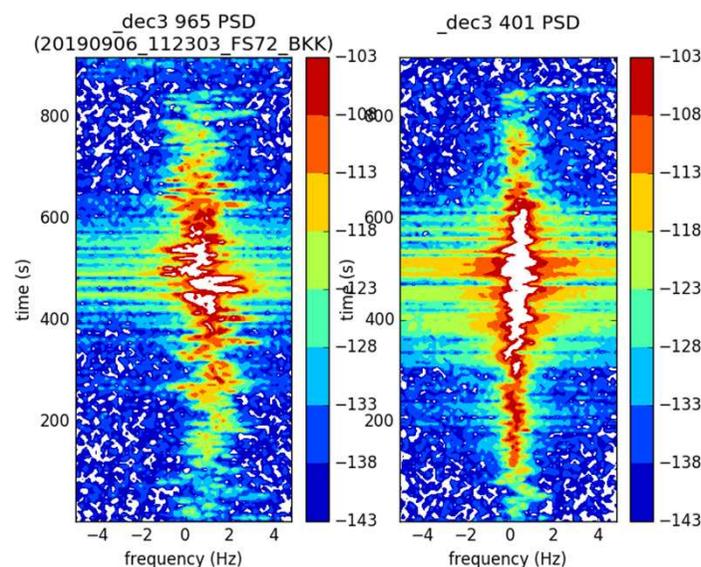
1st COSMIC-2 Beacon Signal (2)

September 6, 2019 11:23UT-, Bangkok, Thailand



Signal processing scheme

- Frequency finding and down sampling with preserving phase (difference) information. Three-step processing.
- Sampling speed decreases from original 100 kHz (last page)
 - (top left) 1 kHz
 - (top right) 50 Hz ... for S4 index
 - (bottom right) 10 Hz ... for TEC



ESPRIT法とは

- ある信号を等間隔に配置された複数の素子で観測するとき、素子間の位相差を推定する手法。
- アレイアンテナの電波到来方向の推定手法として開発されたらしい。しかしながら、
 - 電波到来方向の推定 = 複数アンテナ間の信号位相差
 - 周波数推定 = 時間サンプル間の信号位相差 (の微分)
 - 距離推定 = 複数周波数で得られたレーダーエコーの位相差から求める (例えばFM-CWレーダー)
- 全てに適用できる。特長は、
 - 少数サンプル (短時間のデータ) から推定できる。
 - 複数の信号を分離して推定できる。
 - フーリエ変換に基づく方法のように、周波数が信号長の整数分割に縛られないことがない。
- 問題点は、
 - 等間隔サンプリングが必要
 - (有効な) 信号の数を決めてから解析する。
 - 信号強度は求まらない (求めにくい?)